



ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ



Кадетский класс

В МОСКОВСКОЙ ШКОЛЕ

НАПРАВЛЕНИЯ
МЧС, ВКС, СВ, ПВО, РВСН, ВМФ,
КАЗАКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЭТАП

МОСКВА
2025





ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ РАЗРАБОТАНЫ:

Авторы:

Борисова А.С., доцент кафедры органической химии и химии нефти;

Стоколос О.А., доцент кафедры органической химии и химии нефти;

Филиппова Л. Б., ст. преподаватель кафедры физики;

Фридлянд А. М., доцент кафедры автоматизированных систем управления;

Фоменко Н. А., доцент кафедры высшей математики



ГУБКИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

МОСКВА
2025

МОСКВА 2025
СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Структура экзаменационной работы теоретической части
2. План конкурсных материалов для проведения теоретического этапа Конкурса.
3. Демонстрационный вариант конкурсных заданий теоретического этапа Конкурса. Пример состава задания теоретического этапа Конкурса.

4. Математика

4.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

- 4.1.1. Геометрия
- 4.1.2. Статистика и теория вероятностей
- 4.1.3. Числа и выражения
- 4.1.4. Начало математического анализа

4.2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. РАЗБОР ЗАДАЧ
ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА.

- 4.2.1. Решение задачи 1 (базовый уровень).
- 4.2.2. Решение задачи 2 (базовый уровень).
- 4.2.3. Решение задачи 3 (повышенный уровень).
- 4.2.4. Решение задачи 4 (повышенный уровень).
- 4.2.5. Типовые ошибки в решении задачи.

5. Информатика

5.1 . ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

- 5.1.1 Одномерные массивы, их обработка, суммирование элементов, поиск элемента по условию. Обработка двумерных массивов.
- 5.1.2 Измерение количества информации.
- 5.1.3 Сравнение чисел, записанных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления и выполнение с ними арифметических действий.
- 5.1.4 Основные законы алгебры логики. Операции «импликация», «эквиваленция». Эквивалентные преобразования логических выражений.

5.2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. РАЗБОР ЗАДАЧ
ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА.

- 5.2.1. Решение задачи 5 (базовый уровень).
- 5.2.2. Решение задачи 6 (базовый уровень).
- 5.1.1. Решение задачи 8 (повышенный уровень).
- 5.1.2. Решение задачи 11 (повышенный уровень).

6. Физика

6.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

- 6.1.1 Емкость удлинённого проводника. Конденсатор. Виды конденсаторов. Ёмкость плоского конденсатора. Соединение конденсаторов. Энергия конденсатора.
- 6.1.2 Второй закон Ньютона для материальной точки в ИСО. Третий закон Ньютона для материальных точек. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения и сила трения покоя. Коэффициент трения.
- 6.1.3 Газовые законы. Уравнение Менделеева - Клапейрона. Закон Дальтона. Изопроцессы в идеальном газе с постоянным количеством вещества: изотерма, изохора, изобара, графическое представление изопроцессов.
- 6.1.4 Постоянный электрический ток. Закон Ома для участка цепи. Закон Ома для полной цепи. Закон Джоуля - Ленца. Правила последовательного и параллельного соединения проводников.

6.2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. РАЗБОР ЗАДАЧ ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА.

- 6.2.1. Решение задачи 7 (базовый уровень).
- 6.2.2. Решение задачи 9 (повышенный уровень).
- 6.2.3. Решение задачи 10 (базовый уровень).
- 6.2.4. Решение задачи 12 (повышенный уровень).
- 6.2.5. Типовые ошибки в решении задачи

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические рекомендации предназначены для выполнения конкурсных заданий по физике, информатике и математике для теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Кадетский класс». Рассматривается необходимый теоретический минимум для решения конкурсных задач в соответствии с разделами уникального кодификатора конкурса и тематических разделов школьного курса по дисциплинам физика, информатика и математика.

В методических указаниях приведен план конкурсных материалов для проведения теоретического этапа Конкурса, демонстрационный вариант Конкурса и разбор решения задач из демонстрационного варианта.

1. Структура экзаменационной работы теоретической части

Индивидуальный вариант участника формируется автоматически из базы материалов и состоит из 12 заданий базового и повышенного уровня сложности. Все задания базируются на содержании предметов математика, информатика, физика. В работе имеются задания с кратким ответом (КО) и задания с выбором одного ответа (ВО) из нескольких предложенных. Задания 8 и 9 предусматривают решение одного задания из списка на выбор 8 или 11 номер, и 9 или 12 номер. Задание считается выполненным, если ответ участника совпал с эталоном. Участник может изменить свой ответ в процессе выполнения работы путём удаления и сохранения нового ответа к заданию. Суммарный балл учитывает только 10 номеров. Максимальный балл за выполнение всех заданий – 60 баллов.

2. План конкурсных материалов для проведения теоретического этапа Конкурса

№ задания	Выбор задания для решения	Уровень сложности	Уникальные кодификаторы Конкурса	Контролируемые требования к проверяемым умениям	Балл
1.	КО	базовый (Математика)	2. Модуль геометрия	Знать: основные понятия и аксиомы стереометрии и планиметрии, взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Понятие: многогранник, секущая плоскость, вектора на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам. Правило	5

				параллелепипеда. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми и плоскостями. Координатно-векторный метод решения геометрических задач Уметь: применять аксиомы стереометрии и следствия из них при решении геометрических задач. Решать задачи на нахождение геометрических величин, на вычисление длин и площадей. Решать задачи: с применением свойств фигур на плоскости, с использованием теорем планиметрии, с помощью векторов и координат. Находить расстояние между фигурами в пространстве. Применять правило параллелепипеда при сложении векторов. Складывать, вычитать векторы, умножать вектор на число. Выразить координаты вектора через координаты его концов. Выводить, использовать формулу длины вектора и расстояния между точками. Выразить скалярное произведение векторов через их координаты, вычислять угол между двумя векторами, двумя прямыми. Находить угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями аналитическими методами. Выводить, использовать формулу расстояния от точки до плоскости	
2.	КО	базовый (Математика)	1.4 Статистика и теория вероятностей (11 кл)	Знать: примеры применения математического ожидания (страхование, лотерея). Математическое ожидание суммы случайных величин. Математическое ожидание геометрического и биномиального распределений Дисперсия и стандартное отклонение. Дисперсии геометрического и биномиального распределения.	5

				Практическая работа с использованием электронных таблиц Уметь: оперировать понятием математического ожидания. Приводить и обсуждать примеры применения математического ожидания. Вычислять математическое ожидание. Использовать понятие математического ожидания и его свойства при решении задач. Находить по известным формулам математическое ожидание суммы случайных величин. Находить по известным формулам математические ожидания случайных величин, имеющих геометрическое и биномиальное распределения. Освоить понятия дисперсия, стандартное отклонение случайной величины. Находить дисперсию по распределению. Находить по известным формулам дисперсию геометрического и биномиального распределения, в том числе в ходе практической работы с использованием электронных таблиц	
3.	КО	повышенной (Математика)	1.1 Числа и выражения (11 кл)	Знать: Рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби. Арифметические операции с рациональными числами, преобразования числовых выражений. Применение дробей и процентов для решения прикладных задач из различных отраслей знаний и реальной жизни. Действительные числа. Рациональные и иррациональные числа. Арифметические операции с действительными числами. Приближённые вычисления, правила округления, прикидка и оценка результата вычислений. Целые числа в задачах из реальной жизни.	7

				Признаки делимости целых чисел. Понятия наибольшего и наименьшего числа. Уметь: оперировать понятиями: рациональное и действительное число, обыкновенная и десятичная дробь, проценты; выполнять арифметические операции с рациональными и действительными числами; выполнять приближённые вычисления, используя правила округления, делать прикидку и оценку результата вычислений; оперировать понятиями: степень с целым показателем, стандартная форма записи действительного числа, корень натуральной степени, использовать подходящую форму записи действительных чисел для решения практических задач и представления данных оперировать понятиями: натуральное, целое число, использовать признаки делимости целых чисел, разложение числа на простые множители для решения задач; приближённых вычислений, выполнения действий с числами, записанными в стандартной форме, использования математических констант, оценивания числовых выражений, сформулированной математической задачи, а затем интерпретировать полученный результат, умение находить закономерности, абстрагироваться, использовать аналогию, обобщать и конкретизировать проблему, сравнивать числа разными способами Использовать признаки делимости целых чисел, разложение числа на простые множители для решения задач Выбирать оптимальные способы вычислений. Использовать для решения задач уравнения,	
--	--	--	--	---	--

				неравенства и системы уравнений, свойства функций и графиков. Оперировать понятиями наибольшее и наименьшее число.	
4	КО	повышенной (Математика)	1.4 Начало математического анализа (11 кл)	Знать: понятие первообразная. Таблица первообразных. Интеграл, его геометрический и физический смысл. Вычисление интеграла по формуле Ньютона–Лейбница Уметь: исследовать и строить графики функций, определять их наибольшие и наименьшие значения, вычислять площади фигур и объёмы тел, находить скорости и ускорения процессов, оперировать понятиями: первообразная и интеграл, понимать геометрический и физический смысл интеграла; находить первообразные элементарных функций, вычислять интеграл по формуле Ньютона–Лейбница; решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, средствами математического анализа.	7
5	ВО	базовый (Информатика)	3.7 Одномерные массивы, их обработка, суммирование элементов, поиск элемента по условию. Обработка двумерных массивов	Знать: сложные (составные) структуры данных, понятие массива данных. Уметь: организовывать ввод, вывод, обработку массивов, включая суммирование и поиск элементов по условию.	5
6	КО	базовый (Информатика)	1.2 Измерение количества информации.	Знать: теоретические подходы к оценке информационного объёма текстовых, графических и звуковых данных для процессов хранения этих данных и их передачи по каналам связи Уметь: решать задачи на определение информационного объёма текстовых, графических и	5

				звуковых данных для процессов хранения этих данных и их передачи по каналам связи.	
7	ВО	базовый (физика)	4.1.8. Электроёмкость. Конденсатор. Электроёмкость плоского конденсатора. Энергия заряженного конденсатора (10 класс)	Знать: определение электроёмкости, электроёмкости плоского конденсатора, формулы энергии плоского конденсатора Уметь: рассчитывать электроёмкость и энергию плоского конденсатора	5
8	КО выбор 8 или 11	повышенный Информатика	2.3. Сравнение чисел, записанных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления и выполнение с ними арифметических действий.	Знать: Двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления, перевод чисел между этими системами Уметь: Выполнять сравнение, сложение и вычитание чисел, записанных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.	8
9	КО Выбор 9-12	Повышенный (физика)	2.2.3. Второй закон Ньютона для материальной точки в ИСО. Третий закон Ньютона для материальных точек	Знать: законы Ньютона; понятие силы трения и ее виды; формулы для нахождения силы трения; определение силы упругости; закон Гука; определение деформации; жесткость Уметь: решать задачи с применением законов Ньютона; решать задачи, связанные с силой трения; решать задачи с использованием понятия силы упругости, закона Гука.	8

			2.2.8. Сила упругости. Закон Гука 2.2.9. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения и сила трения покоя. Коэффициент трения (10 класс) 2.1.3 Равномерное и равноускоренное прямолинейное движение. Зависимость координат, скорости, ускорения и пути материальной точки от времени. Графики этих зависимостей.		
10	КО	базовый (физика)	3.1.7 Газовые законы, уравнение Менделеева-Клапейрона, закон Дальтона 3.1.8 Изопроцессы в	Знать: основные положения молекулярно-кинетической теории, основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа, уравнение Менделеева-Клапейрона, газовые законы, изопроцессы в идеальном газе с постоянным количеством вещества: изотерма, изохора, изобара, графическое представление изопроцессов	5

			идеальном газе с постоянным количеством вещества: изотерма, изохора, изобара, графическое представление изопроцессов	Уметь: Решать задачи с использованием основных законов и формул молекулярно-кинетической теории; решать графические и аналитические задачи, используя уравнения состояния и газовые законы	
11	ВО выбор 8-11	повышенный (Информатика)	3.2 Основные законы алгебры логики. Операции «импликация», «эквиваленция». Эквивалентные преобразования логических выражений	Знать: понятие булевой функции и варианты ее описания; основные булевы функции; базовые законы алгебры логики Уметь: вычислять значение логического выражения по теоретическому описанию функции; синтезировать таблицу истинности функции; сравнивать функции между собой по теоретическим описаниям и таблицам истинности.	8
12	КО Выбор 9-12	Повышенный (физика)	4.2. Постоянный электрический ток (10 класс)	Знать: Смысл понятий: элементарный электрический заряд, сила тока, напряжение, сопротивление, мощность тока, ЭДС источника тока, внутреннее сопротивление источника тока; закон Ома для участка цепи, закон Ома для полной цепи, короткое замыкание закон Джоуля-Ленца, правила последовательного и параллельного соединения проводников Уметь: Применять основные законы и правила для решения задач, в том числе, задач на расчет электрических цепей.	8
Сумма баллов:					60

**Демонстрационный вариант конкурсных заданий *теоретического* этапа
Конкурса. Пример состава задания теоретического этапа Конкурса.**

1. Зенитная установка и опорный пункт противника расположены в вершинах треугольника ABC (точка B – зенитная установка, C - опорный пункт). Медианы треугольника ABC, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$, обозначим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Для точности наведения, найдите выражение вектора $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ 2) $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$ 3) $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ 4) $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$

Ответ: 1) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

2. На учениях снайпер стреляет по цели до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Найти математическое ожидание случайной величины X - числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

Ответ: 0,4251.

3. Гуманитарную помощь отправляют фурой грузоподъёмностью 321 кг. Машину укомплектовывают коробками с одеждой и продуктами питания. Стоимость коробки с одеждой составляет 20 тысяч рублей и весит 15 кг. Стоимость коробки с продуктами - 18 тысяч рублей и весит 12 кг. Пострадавшие просят отправить им больше еды. Какое минимальное количество средств необходимо, собрать волонтерам, для отправки груза (при этом выполнить пожелание пострадавших). Фура должна быть заполнена полностью. *Ответ дать в тысячах рублей.*

Ответ: 474.

4. Для оценки района боевых действий, необходимо определить площадь местности, занятой противником. Известно, что исследуемый объект ограничен линиями: $y=x^2+2$, $x=2$, $x=0$, $y=1$. *Ответ округлите до сотых.*

Ответ: 4,67.

5. Для массива $x[1..N]$ фрагмент алгоритма на псевдокоде

```

s := 0
нц для k от N до 1 шаг -1
|   если ( 0 > x[ k ] )
|   |   то s := k
|   все
кц

```

определяет:

- 1) минимальный элемент массива
- 2) сумму отрицательных элементов массива
- 3) количество отрицательных элементов массива
- 4) максимальный индекс отрицательного элемента массива
- 5) минимальный индекс отрицательного элемента массива

Ответ: 5

6. Музыкальный фрагмент был записан в формате квадро (четырёхканальная запись), оцифрован и сохранён в виде файла без использования сжатия данных. Размер полученного файла – 24 Мбайт. Затем тот же музыкальный фрагмент был записан повторно в формате стерео (двухканальная запись) и оцифрован с разрешением (глубиной кодирования) в 4 раза выше и частотой дискретизации в 2 раза меньше, чем в первый раз. Сжатие данных не производилось. Укажите размер в Мбайт файла, полученного при повторной записи. *В ответе запишите только целое число, единицу измерения писать не нужно.*

Ответ: 24

7. Для усовершенствования цепи обратной связи, в строение плоского воздушного конденсатора внесли следующие изменения: не меняя площади пластин, расстояние между его обкладками уменьшили на 25% и заполнили диэлектриком. В результате, ёмкость увеличилась в 5,5 раза. По данным таблицы 1 определите вещество, которым был заполнен конденсатор. *В ответе укажите номер выбранного вами вещества.*

Таблица 1 - Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ (при температуре 20°С)

№	Вещество	Диэлектрическая проницаемость
1	Слюда	5,7 - 7
2	Фарфор	6 - 8
3	Стекло	4 - 7
4	Парафин	2,1 - 2,2
5	Битум	2,5 - 3

Ответ: 3

8. Для чисел, заданных в различных системах счисления:

$$X = 1C_{16}, Y = 11001_2, Z = 32_8,$$

определить значение выражения $2 \cdot \min(X, Y, Z) + \max(X, Y, Z)$.

Ответ записать в виде восьмеричного числа без указания основания системы счисления.

Ответ: 116

9. Мальчик толкает лежащий на горизонтальной поверхности брусок с силой, направленной горизонтально и равной $1/4$ силы тяжести, действующей на брусок. Спустя некоторое время t , мальчик прекращает толкать брусок. Найдите это время t , если известно, что полный путь, пройденный телом от начала движения до остановки, равен 30 м, а коэффициент трения бруска о поверхность 0,1. $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Ответ: 4

10. Надувной матрас был накачан утром, когда температура воздуха была 16°C . На сколько процентов увеличилось давление в матрасе, если днем под воздействием солнечных лучей он прогрелся до 25°C ? Считать, что объем матраса не изменится. *Ответ округлить до целых.*

Ответ: 3

11. Три роты курсантов (обозначим их А, В и С) претендовали на призовые места в соревнованиях по стрельбе из автомата. Военные специалисты, входившие в состав жюри соревнований, высказали следующие предположения по поводу результатов соревнований:

- 1) то, что рота С войдет в число призеров, не является необходимым для того, чтобы роты А и В стали призерами одновременно;
- 2) рота В станет призером только тогда, когда призерство роты А не будет достаточным основанием для призерства роты С;
- 3) призерство роты А равносильно тому, что в число призеров войдет хотя бы одна из рот В и С.

После окончания соревнований оказалось, что одно из трех предположений ложно.

Это означает, что в число призеров вошли роты

- 1) А,С 2) А,В,С 3) А,В 4) В,С 5) А

Ответ: 1

12. Найдите внутреннее сопротивление источника тока, изображенного на схеме (см. рис.1), если $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$. При этом известно, что при замкнутом ключе К через резистор R_2 течет ток $I_2 = 2 \text{ А}$, а при разомкнутом - через резистор R_1 течет ток $I_1 = 5,6 \text{ А}$.

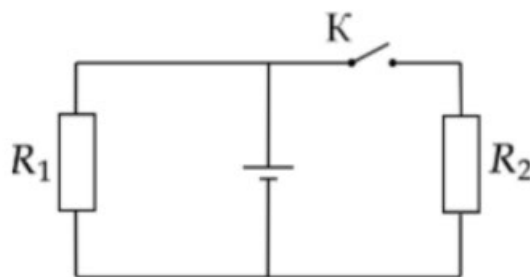


Рис.1

Ответ: 8

Разберем задачи последовательно по нумерации и по предметам.

4. МАТЕМАТИКА

4.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

4.1.1. ГЕОМЕТРИЯ

Основной упор в первой задаче из раздела «Геометрия», сделан на тему «Векторы и координаты в пространстве». Для ее решения возможно понадобятся: основные понятия и аксиомы стереометрии и планиметрии, взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Ниже кратко рассмотрены основные темы.

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Обозначение: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ (где точка А - начало вектора, точка В - конец).

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора.

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$$

Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых.

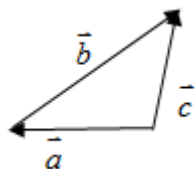
Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

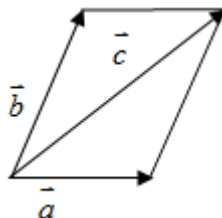
Линейными операциями над векторами:

Суммой векторов является вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Правило треугольника: сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$.



Правило параллелограмма: сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на них как на сторонах, выходящая из их общего начала.



Произведение вектора на число: $\vec{b} = \alpha \vec{a}$; $|\vec{b}| = \alpha |\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Законы сложения и умножения векторов

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
- 5) $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность
- 7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- 8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки на плоскости $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, то $|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Свойства скалярного произведения:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$; $m = \text{const}$
- 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- 4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
- 5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$.

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a)$; $\vec{b}(x_b, y_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos \phi = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

4.1.2 СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для решения задачи 2 необходимо оперировать такими понятиями как: случайная величина, ряд распределения случайной величины, математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Для построения ряда распределения могут понадобиться знания из курса теории вероятностей. Ниже кратко рассмотрены основные понятия, законы и теоремы теории вероятностей и математической статистики. Разобраны примеры.

Любая точная наука изучает не сами явления, протекающие в природе, в обществе, а их математические модели, т. е. описание явлений при помощи набора строго определенных символов и операций над ними. При этом для построения математической модели реального явления во многих случаях достаточно учитывать только основные факторы, закономерности, которые позволяют предвидеть результат опыта (наблюдения, эксперимента) по его заданным начальным условиям. Однако есть множество задач, для решения которых приходится учитывать и случайные факторы, придающие исходу опыта элемент неопределенности.

Теория вероятностей - математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы - математические модели. Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений (событий). При этом под **случайным явлением** понимают явление, предсказать исход, которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному). Примеры случайных явлений: выпадение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, длительность работы телевизора и т. п. Цель теории вероятностей - осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

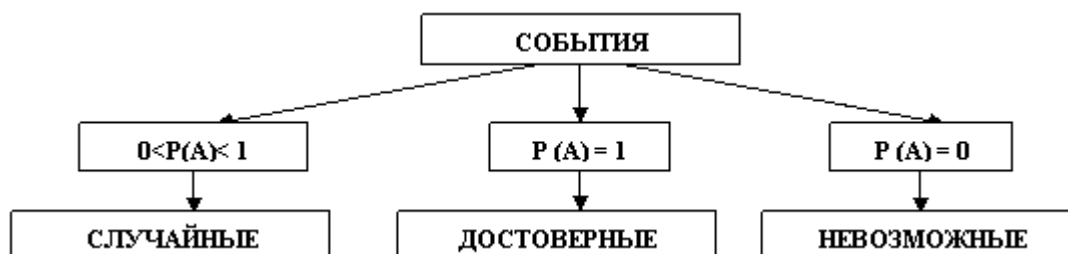
Случайным событием (или просто: событием) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти. События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$.

Если появление одного события в единичном испытании исключает появление другого, такие события называются **несовместными**. Если при рассмотрении группы событий может произойти только одно из них, то его называют **единственно возможным**. Наибольшее внимание математиков в течение нескольких столетий привлекают **равновозможные события** (выпадение одной из граней кубика).

Примеры: а) при подбрасывании игральной кости пространство элементарных событий Π состоит из шести точек: $\Pi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; б) подбрасываем монету два раза подряд, тогда $\Pi = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$, где Г - «герб», Р - «решетка» и общее число исходов (мощность Π) $|\Pi| = 4$; в) подбрасываем монету до первого появления «герба», тогда $\Pi = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, \dots\}$. В этом случае Π называется дискретным пространством элементарных событий.

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в выполнении события A или события B . **Произведением событий A и B** называется событие $D = A \cdot B$, состоящее в совместном исполнении события A и события B . Противоположным по отношению к событию A называется событие $\bar{A}$, состоящее в непоявлении A и, значит, дополняющее его до Π . Если каждое появление события A сопровождается появлением B , то пишут $A \subset B$ и говорят, что A предшествует B или A влечет за собой B .

Исторически первым определением понятия вероятности является то определение, которое в настоящее время принято называть классическим, или, классической вероятностью: **классической вероятностью** события A называется отношение числа благоприятных исходов (обязательно наступивших) к общему числу несовместных единственно возможных и равновозможных исходов: $P(A) = m/n$, где m – число исходов, благоприятных для события A ; n – общее число несовместных единственно возможных и равновозможных исходов. С точки зрения значения случайности все события можно классифицировать следующим образом:



Пример.

В ящике 5 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 5. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 5.

Решение.

Так как номер шара не превышает 5, то число случаев, благоприятных событию A , равно числу всех случаев $m = n = 5$.

$$P(A) = \frac{5}{5} = 1.$$

A – событие достоверное.

Несколько событий называются **совместными**, если появление одного из них в единичном испытании не исключает появления других событий в этом же испытании. В противном случае события называются **несовместными**.

Два события называются зависимыми, если вероятность одного события зависит от появления или не появления другого. Два события называются **независимыми**, если вероятность одного события не зависит от появления или не появления другого. Несколько событий называются независимыми в совокупности, если каждое из них и любая комбинация остальных событий есть события независимые. Несколько событий называются попарно независимыми, если любые два из этих событий независимы.

Требование независимости в совокупности сильнее требования попарной независимости. Это значит, что несколько событий могут являться попарно независимыми, но при этом они не будут независимыми в совокупности. Если же несколько событий независимы в совокупности, то из этого следует их попарная независимость. В связи с тем, что в дальнейшем часто нужно будет рассматривать вероятности одних событий в зависимости от появления или не появления других, то необходимо ввести еще одно понятие.

Теорема (Сложения вероятностей)

Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

События A и B называются независимыми, если вероятность A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Условной вероятностью $P(B/A)$ называется вероятность события B , вычисленная при условии, что событие A уже произошло.

Теорема (Умножения вероятностей)

Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое наступило:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример.

Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка – 0,75; для второго – 0,3; для третьего – 0,9. Найти вероятность того, что все три стрелка попадут в цель.

Решение.

Пусть событие A – первый стрелок попал в цель; событие B – второй стрелок попал в цель; событие C – третий стрелок попал в цель;

ABC – все три стрелка попадут в цель.

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,75 \cdot 0,3 \cdot 0,9 = 0,2025.$$

Пример.

Идет бомбардировка трех складов боеприпасов. Сбрасывают одну бомбу. Вероятность попадания в первый склад равна 0,01; во второй равна 0,008; в третий – 0,025. При попадании в любой из них взрываются все. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

Решение.

Событие A – взрыв складов; A_1 – попадание в первый склад; A_2 – попадание во второй склад; A_3 – попадание в третий склад.

$A = A_1 + A_2 + A_3$, так как A_1, A_2, A_3 несовместны, то:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,01 + 0,008 + 0,025 = 0,043.$$

Пример.

Имеется три ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение.

Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A) равна $P(A) = \frac{8}{10} = 0,8$.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B) равна $P(B) = \frac{7}{10} = 0,7$.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C) равна $P(C) = \frac{9}{10} = 0,9$.

Так как события A , B и C независимы, то искомая вероятность события ABC (по теореме умножения) равна

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9 = 0,504.$$

Формула полной вероятности и формула Байеса. Пусть рассматривается полная группа событий $H_1, H_2, \dots, H_n$ (попарно несовместные, которые называются гипотезами), и если событие A может наступить только при появлении одной из этих гипотез, то вероятность события A вычисляется по **формуле полной вероятности**:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots + P(H_n)P(A|H_n),$$

или

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i),$$

где $P(H_i)$ – вероятность гипотезы H_i , $\left(\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1\right)$.

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так, называемая теорема гипотез, или формула Бейеса. Надо найти теперь условные вероятности $P(H_i|A)$ для каждой из гипотез, которые вычисляются по **формуле Бейеса**:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}.$$

Формула Байеса дает возможность переоценить вероятности гипотез с учетом уже известного результата опыта.

Повторение опытов. Если производится n независимых опытов в одинаковых условиях, причем в каждом из них с вероятностью p происходит событие A , то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A произойдет в этих n опытах ровно m раз, выражается формулой:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $q = 1 - p$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), которая называется **формулой Бернулли**.

Вероятность появления хотя бы одного события A при n независимых опытах в одинаковых условиях равна $1 - q^n$.

Вероятность того, что событие наступит а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз находим соответственно, но формулам:

- а) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$;
- б) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$;
- в) $P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$;
- г) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$.

Пример.

В урне 30 белых и 15 черных шаров. Вынули подряд 5 шаров, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из 5 вынутых шаров окажется 3 белых.

Решение.

Вероятность извлечения белого шара $p = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$, можно посчитать одной и той же во всех 5 испытаниях. Тогда вероятность не появления белого шара равна $q = 1 - p = \frac{1}{3}$

Используя формулу Бернулли получаем:

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{20}{2} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} = \frac{80}{243}.$$

Ответ: $\frac{80}{243}$.

Пример.

Монету подбрасывают восемь раз. Какова вероятность того, что шесть раз она упадет гербом вверх?

Решение.

Имеем схему испытаний Бернулли. Вероятность появления герба в одном испытании $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$, тогда

$$P_8(6) = C_8^6 p^6 q^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{7}{2^6} = 0,109.$$

Ответ: 0,109.

Одним из важнейших понятий теории вероятностей (наряду со случайным событием и вероятностью) является понятие **случайной величины**.

Под случайной величиной понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Примерами случайной величины могут служить: 1) X — число очков, появляющихся при бросании игральной кости; 2) Y — число выстрелов до первого попадания в цель; 3) Z — время безотказной работы прибора и т.п. Случайная величина, принимающая конечное или счетное множество значений,

называется **дискретной**. Если же множество возможных значений случайной величины несчетно, то такая величина называется **непрерывной**.

То есть дискретная случайная величина принимает отдельные изолированные друг от друга значения, а непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого промежутка (например, значения на отрезке, на всей числовой прямой и т.д.). Случайные величины X и Y (примеры 1) и 2)) являются дискретными. Случайная величина Z (пример 3)) является непрерывной: ее возможные значения принадлежат промежутку $[0, t)$, где $t > 0$, правая граница не определена. Отметим, что рассматриваются также случайные величины смешанного типа.

Дадим теперь строгое определение случайной величины, исходя из теоретико-множественной трактовки основных понятий теории вероятностей.

Случайной величиной X называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Π , которая каждому элементарному событию w ставит в соответствие число $X(w)$, т.е. $X = X(w)$.

Ряд распределения (закон распределения) - Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *рядом распределения*:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2		...	p_n

где $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $p_i = P(X = x_i)$.

Пример.

Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

Решение.

Строим ряд распределения вероятностей, используя формулу Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$P_3(0) = C_3^0 0,3^0 (1-0,3)^3 = \frac{3!}{0! \cdot (3-0)!} \cdot 0,3^0 0,7^3 = 0,343.$$

$$P_3(1) = C_3^1 0,3^1 (1-0,3)^2 = \frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} \cdot 0,3^1 0,7^2 = 0,441.$$

$$P_3(2) = C_3^2 0,3^2 (1-0,3) = \frac{3!}{2! \cdot (3-1)!} \cdot 0,3^2 0,7^1 = 0,189.$$

$$P_3(3) = C_3^3 0,3^3 (1-0,3)^0 = \frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} \cdot 0,3^3 0,7^0 = 0,027.$$

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Основными характеристиками случайной величины являются характеристики положения (математическое ожидание, мода, медиана) и характеристики рассеивания (дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

Математическое ожидание вычисляется по формуле $MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$ и характеризует среднее значение случайной величины.

Мода (M_0) – это такое значение случайной величины, для которого соответствующее значение вероятности максимально.

Медианой дискретной случайной величины (M_e) называется такое значение x_k в ряду возможных значений случайной величины, которые она принимает с определенными значениями вероятностей, что приблизительно равновероятно закончится ли процесс до x_k или продолжится после него.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D[X] = M(X - M[X])^2 = M[X^2] - M^2[X]$.

Среднеквадратическим отклонением случайной величины X называют положительное значение квадратного корня из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{DX}$

Пример.

Случайная величина X – число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить $\sigma(x)$.

Решение.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Имеем

$$MX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5;$$

$$DX = (1 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6 - 3,5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,171.$$

4.1.3. ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

Признак делимости — правило, позволяющее сравнительно быстро определить, является ли число кратным заранее заданному без необходимости выполнять фактическое деление. Как правило, основано на действиях с частью цифр из записи числа в позиционной системе счисления (обычно десятичной).

Существуют несколько простых правил, позволяющих найти малые делители числа в десятичной системе счисления:

Признак делимости на 2

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2, то есть является чётной.

Признак делимости на 3

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (так как все числа вида $10n$ при делении на 3 дают в остатке единицу).

Признак делимости на 4

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число из двух последних его цифр (оно может быть двузначным, однозначным или нулём) делится на 4.

Признак делимости на 5

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).

Признак делимости на 6

Число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится и на 2, и на 3.

Признак делимости на 7

Число делится на 7 тогда и только тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7 (например, 364 делится на 7, так как $36 - (2 \times 4) = 28$ делится на 7).

Признак делимости на 8

Число делится на 8 тогда и только тогда, когда три его последние цифры — нули или образуют число, которое делится на 8.

Признак делимости на 9

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости на 10

Число делится на 10 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на ноль.

Признак делимости на 11

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда сумма цифр с чередующимися знаками равна 0 или делится на 11 (то есть 182 919 делится на 11).

11, так как $1 - 8 + 2 - 9 + 1 - 9 = -22$ делится на 11) — следствие факта, что все числа вида $10n$ при делении на 11 дают в остатке $(-1)n$.

Признак делимости на 12

Число делится на 12 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 4.

Признак делимости на 13

Число делится на 13 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с учетверённым числом единиц, кратно 13 (например, 845 делится на 13, так как $84 + (4 \times 5) = 104$ делится на 13).

Признак делимости на 14

Число делится на 14 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 7.

Признак делимости на 15

Число делится на 15 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 5

Признак делимости на 17

Число делится на 17 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с увеличенным в 12 раз числом единиц, кратно 17 (например, $29053 \rightarrow 2905 + 36 = 2941 \rightarrow 294 + 12 = 306 \rightarrow 30 + 72 = 102 \rightarrow 10 + 24 = 34$. Поскольку 34 делится на 17, то и 29053 делится на 17). Признак не всегда удобен, но имеет определенное значение в математике. Есть способ немного проще — число делится на 17 тогда и только тогда, когда разность между числом его десятков и упятерённым числом единиц кратна 17 (например, $32952 \rightarrow 3295 - 10 = 3285 \rightarrow 328 - 25 = 303 \rightarrow 30 - 15 = 15$; поскольку 15 не делится на 17, то и 32952 не делится на 17)

Признак делимости на 19

Число делится на 19 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, кратно 19 (например, 646 делится на 19, так как $64 + (6 \times 2) = 76$ делится на 19).

Признак делимости на 23

Число делится на 23 тогда и только тогда, когда число его сотен, сложенное с утроенным числом десятков и единиц, кратно 23 (например, 28842 делится на 23, так как $288 + (3 \times 42) = 414$; продолжаем: $4 + (3 \times 14) = 46$ — очевидно, делится на 23).

Признак делимости на 25

Число делится на 25 тогда и только тогда, когда две его последние цифры делятся на 25 (то есть образуют 00, 25, 50 или 75).

Признак делимости на 99

Разобьем число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдем сумму этих групп, считая их двузначными числами. Эта сумма делится на 99 тогда и только тогда, когда само число делится на 99.

Признак делимости на 101

Разобьем число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдем сумму этих групп с переменными знаками, считая их двузначными числами. Эта сумма делится на 101 тогда и только тогда, когда само число делится на 101. Например, 590547 делится на 101, так как $59-05+47=101$ делится на 101).

Арифметическая прогрессия

Определение: арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Рассмотрим последовательность (a_n) , каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом a , называемым разностью прогрессии. Чтобы найти разность арифметической прогрессии нужно из второго члена вычесть первый:

$$d = a_2 - a_1.$$

Также для нахождения разности верно неравенство:

$$d = a_{n+1} - a_n$$

для любого натурального числа n характерна рекуррентная формула:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

где d — некоторое число.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n, \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

Геометрическая прогрессия

Определение: Последовательность, у которой задан первый член $b_1 \neq 0$, а каждый следующий равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$, называется геометрической прогрессией:

$$b_{n+1} = b_n q, \quad \text{где } q - \text{знаменатель прогрессии.}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad b_n = b_k q^{n-k}$$

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1} \quad b_n b_m = b_k b_l, \text{ если } n + m = k + l$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad S = \frac{b_1}{1-q}$$

Определение: наибольшее и наименьшее значения — крайние числа в упорядоченном по возрастанию или убыванию числовом наборе

Пример.

Гуманитарную помощь отправляют фурой грузоподъемностью 321 кг. Машину укомплектовывают коробками с одеждой и продуктами питания. Стоимость коробки с одеждой составляет 20 тысяч рублей и весит 15 кг. Стоимость коробки с продуктами - 18 тысяч рублей и весит 12 кг. Какое минимальное количество средств необходимо, собрать волонтерам, для отправки груза. Фура должна быть заполнена полностью. *Ответ дать в тысячах рублей.*

Решение:

Пусть в фуру поместилось коробок с одеждой — x шт., с продуктами — y шт. (Числа x, y — целые).

Для удобства составим вспомогательную таблицу:

	Цена 1 коробки, тысяч рублей	Вес 1 коробки, кг.	Всего, шт.
Коробка с одеждой	20	15	x
Коробка с продуктами	18	12	y

Тогда имеем:

$$15x + 12y = 321$$

$$5x + 4y = 107$$

По условию задачи нам известна цена одной коробки с одеждой - 20 тысяч рублей, и с продуктами - 18 тысяч рублей.

Найдем стоимость 1 кг одежды и 1 кг продуктов:

$$\frac{20}{15} = \frac{4}{3} \text{ — стоимость 1 кг одежды,}$$

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2} \text{ — стоимость 1 кг продуктов.}$$

Так как $\frac{3}{2} > \frac{4}{3}$, то для того, чтоб собрать минимальную сумму, необходимо, чтоб в фуру было больше коробок с одеждой.

$$\text{Стоимость всех коробок равна: } S = 20x + 18y$$

$$\text{Общий вес: } 5x + 4y = 107$$

Величина $(107 - 4y)$, должна делиться на 5.

Признак делимости на 5: число делится на 5 тогда и только тогда, когда последняя цифра делится на 5 (то есть равна 0 или 5).

$y=0$: $5x=107$ — не удовлетворяет условию.

$y=1$: $5x=103$ — не удовлетворяет условию.

$y=2$: $5x=99$ — не удовлетворяет условию.

$y=3$: $5x=95$ — удовлетворяет условию.

Следовательно, $x=19$.

$$\text{Стоимость всех коробок равна: } S = 20 \cdot 19 + 18 \cdot 3 = 434$$

Ответ: 434 тысяч рублей.

4.1.4. НАЧАЛО МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Функция	Первообразная
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
1	$x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} \ln kx+b + C$
e^x	$e^x + C$
$e^{kx+b}, k \neq 0$	$\frac{1}{k} e^{kx+b} + C$
$\sin(kx+b), k \neq 0$	$-\frac{1}{k} \cos(kx+b) + C$
$\cos(kx+b), k \neq 0$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + C$

Пример.

1. Для функции $f(x) = \cos x$, функция $F(x) = \sin x + C$, является первообразной, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

2. Для функции $f(x) = x^2$, функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, является первообразной, так как $(\frac{x^3}{3})' = x^2$.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Таблица основных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

Простейшие правила интегрирования

$\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, где $a=const$, т.е. постоянный множитель, можно выносить за знак интеграла.

$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$, т.е. интеграл от алгебраической суммы функций, равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Пример.

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C; \quad \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ – какая-либо её первообразная на $[a; b]$ ($F'(x) = f(x)$), то имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Равенство называется формулой Ньютона-Лейбница, а выражение

$$\int_a^b f(x)dx$$

называется определенным интегралом.

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

Если ввести обозначение **то формулу Ньютона-Лейбница можно переписать так:**

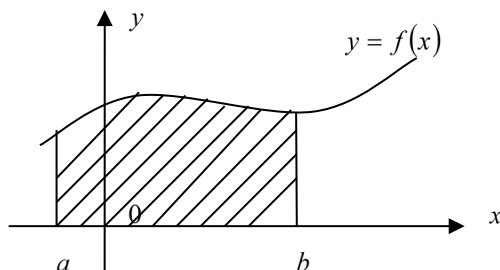
$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$$

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Определим криволинейные трапеции с основаниями на оси ox и оси oy и соответствующие формулы для вычисления их площадей.

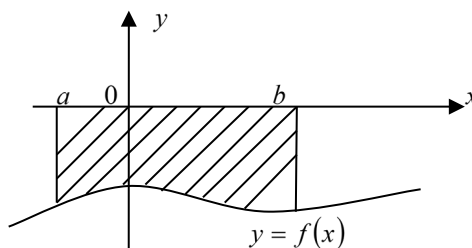
1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox , вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



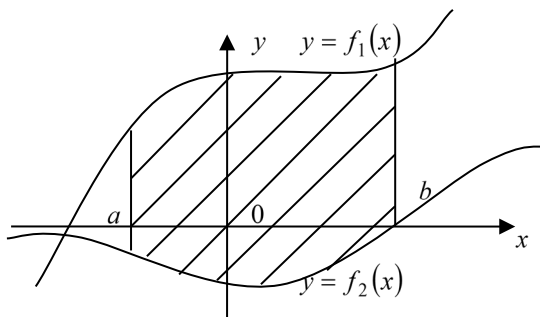
2. Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, $f(x) \leq 0$, непрерывная, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox равна

$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

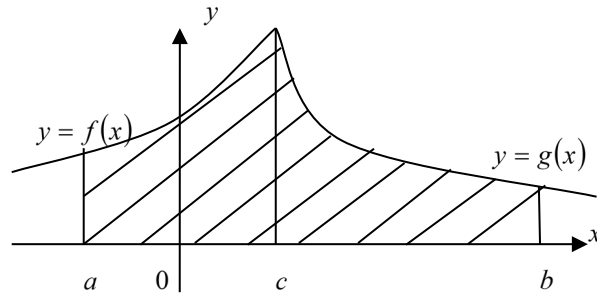


3. Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \geq f_2(x)$) и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$



4. Если плоская фигура имеет «сложную» форму, то прямыми, параллельными оси Oy , её следует разбить на части так, чтобы можно было бы применить уже известные формулы



Здесь непрерывные и неотрицательные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются в точке с абсциссой $x = c$.

$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x = 2$, $y = 0$, $x = 0$.

Решение: Построим линии ограничивающие фигуру.

$x = 2$ – прямая, параллельная оси Oy

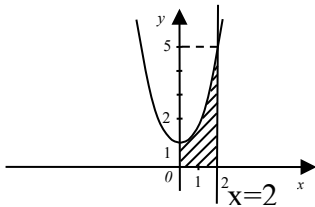
$x = 0$ – ось Oy.

$y = 0$ – ось Ox.

$y = x^2 + 1$ – парабола с центром в точке $(0;1)$;

если $x = 2$, то $\Rightarrow y = 5$

если $x = -2$, то $\Rightarrow y = 5$



Фигура является криволинейной трапецией.

Ее график схож с пунктом 1.

$$\text{Тогда } S = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = 2\frac{2}{3} + 2 = 4\frac{2}{3}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x + 2y - 8 = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x = 0$.

Решение: Построим линии ограничивающие фигуру.

$x + 2y - 8 = 0$ – прямая;

если $x = 0$, то $2y - 8 = 0 \Rightarrow y = 4$,

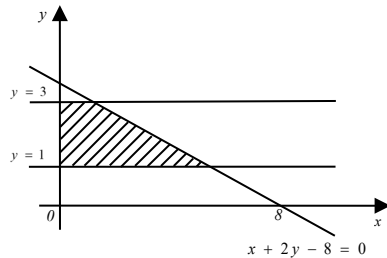
если $y = 0$, то $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$.

Прямая проходит через точки $(0;4)$, $(8;0)$.

$y = 1$ – прямая, параллельная оси Ох, пересекает прямую $x + 2y - 8 = 0$ в точке (6; 1).

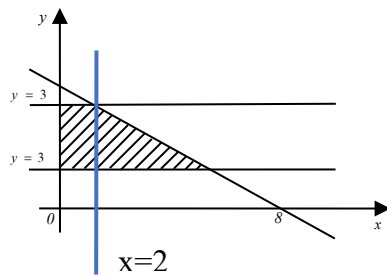
$y = 3$ – прямая, параллельная оси Ох, пересекает прямую $x + 2y - 8 = 0$ в точке (2; 3).

$x = 0$ – ось Оу.



Фигура является криволинейной трапецией. Ее график схож с пунктами 3, 4.

Через точку (2;3) проведем прямую $x=2$ параллельную Оу и разобьем криволинейную трапецию на две части, тогда



$$S = \int_0^2 (3-1)dx + \int_2^6 \left(\left(4 - \frac{x}{2}\right) - 1\right)dx = \int_0^2 2dx + \int_2^6 \left(3 - \frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= 2x \Big|_0^2 + 3x \Big|_2^6 - \frac{x^2}{4} \Big|_2^6 = (4 - 0) + (18 - 6) - \frac{1}{4} \Big| (6^2 - 2^2) = 8$$

4.2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. РАЗБОР ЗАДАЧ ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА.

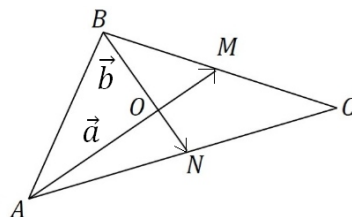
4.2.1. Решение задачи 1 (базовый уровень)

Зенитная установка и опорный пункт противника расположены в вершинах треугольника ABC (точка В – зенитная установка, С - опорный пункт). Медианы треугольника ABC, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$, обозначим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно. Для точности наведения, найдите выражение вектора $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ 2) $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$ 3) $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ 4) $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$

Решение:

Сделаем чертеж:



Точка М делит сторону ВС пополам, следовательно
 $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$

По правилу треугольника вектор $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}$

Так как точка О делит медиану в отношении 1:2, то

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}, \text{ тогда}$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} = 2(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}) = 2\left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) = \frac{4}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}, \text{ тогда}$$

Ответ: 1) $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

4.2.2. Решение задачи 2 (базовый уровень).

На учениях снайпер стреляет по цели до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Найти математическое ожидание случайной величины X - числа промахов, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7.

Решение:

Событие А – снайпер попал в цель, тогда

$$P(A) = 0,7$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Дискретная случайная величина X - числа промахов, может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Найдем соответствующие вероятности:

1) X = 0 - снайпер попал в цель при первом выстреле, тогда

$$P(X=0) = 0,7$$

2) $X = 1$ - снайпер не попал в цель при первом выстреле и попал в цель при втором выстреле, тогда

$$P(X=1) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$$

3) $X = 2$ - снайпер не попал в цель при первом выстреле и втором выстреле, и попал в цель при третьем выстреле, тогда

$$P(X=2) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,063$$

4) $X = 3$ - снайпер не попал в цель при первом, втором и третьем выстреле, и попал в цель при четвертом выстреле, тогда

$$P(X=3) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,0189$$

5) $X = 4$ - снайпер не попал в цель при первом, втором, третьем и четвертом выстрелах, поэтому $P(X=4) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0081$

Запишем закон распределения дискретной случайной величины X - числа промахов:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,7	0,21	0,063	0,0189	0,0081

$$M(X) = \sum_{i=0}^4 x_i p_i = 0 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,21 + 2 \cdot 0,063 + 3 \cdot 0,0189 + 4 \cdot 0,0081 = 0,4251.$$

Ответ: 0,4251.

4.2.3. Решение задачи 3 (повышенный уровень).

Гуманитарную помощь отправляют фурой грузоподъемностью 321 кг. Машину укомплектовывают коробками с одеждой и продуктами питания. Стоимость коробки с одеждой составляет 20 тысяч рублей и весит 15 кг. Стоимость коробки с продуктами - 18 тысяч рублей и весит 12 кг. Пострадавшие просят отправить им больше еды. Какое минимальное количество средств необходимо, собрать волонтерам, для отправки груза (при этом выполнить пожелание пострадавших). Фура должна быть заполнена полностью. *Ответ дать в тысячах рублей.*

Решение:

Пусть в фуру поместилось коробок с одеждой — x шт., с продуктами — y шт. (Числа x, y — целые).

Для удобства составим вспомогательную таблицу:

	Цена 1 коробки, тыс. руб.	Вес 1 коробки, кг	Всего, шт.
Коробка с одеждой	20	15	x
Коробка с продуктами	18	12	y

Тогда имеем:

$$15x+12y=321$$

$$5x+4y=107$$

Так как по просьбе пострадавших в фуру необходимо загрузить больше коробок с продуктами, то коробок с одеждой должно быть минимальное количество, тогда x должно принимать минимальные значения, а величина $(107-5x)$, должна делиться на 4.

Признак делимости на 4: число делится на 4 тогда и только тогда, когда число из двух последних его цифр (оно может быть двузначным, однозначным или нулём) делится на 4.

Можно сделать вывод о том, что x должно быть нечетным.

$$x=1$$

$$5+4y=107$$

$$4y=102$$

$$y = \frac{102}{4} = 25,5 \text{ — не удовлетворяет условию.}$$

$$x=3$$

$$15+4y=107$$

$$y = \frac{92}{4} = 23 \text{ — удовлетворяет условию.}$$

Тогда, волонтерам необходимо собрать

$$20x+18y=20 \cdot 3+18 \cdot 23=474$$

Ответ: 474 тысяч рублей.

4.2.4. Решение задачи 4 (повышенный уровень).

Для оценки района боевых действий, необходимо определить площадь местности, занятой противником. Известно, что исследуемый объект ограничен линиями: $y=x^2+2$, $x=2$, $x=0$, $y=1$. *Ответ округлите до сотых.*

Решение:

Сделаем чертеж:

Построим линии ограничивающие фигуру.

$x = 2$ – прямая, параллельная оси Oy

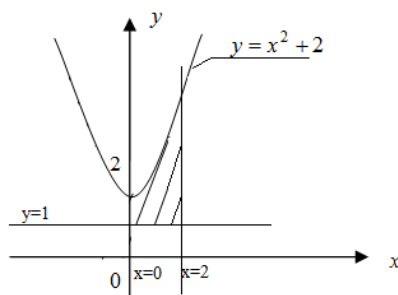
$x = 0$ – ось Oy

$y = 1$ – прямая, параллельная оси Ox

$y = x^2 + 2$ – парабола с центром в точке $(0;2)$;

если $x = 2$, то $\Rightarrow y = 6$

если $x = -2$, то $\Rightarrow y = 6$



Заметим, что площадь местности, занятой противником, ограничена линиями $y=x^2+2$, $x=2$, $x=0$, $y=1$, тогда

$$S = \int_0^2 ((x^2 + 2) - 1) dx = \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} = 4,67$$

Ответ: 4,67.

4.2.5. Типовые ошибки в решении задачи

При решении задачи возможно возникновение ряда характерных ошибок:

- 1) неверно понято условие задачи;
- 2) выбран неверный ход решения;
- 3) ошибка при выборе варианта ответа.

При решении второй задачи возможно возникновение ряда характерных ошибок:

- 1) неверно понято условие задачи;
- 2) неверно составлена логическая цепочка;
- 3) решение усложнено.

Для недопущения подобных ошибок рекомендуется быть внимательным и знать базовые правила выполнения действий и несколько раз прочесть условие задачи.

5. ИНФОРМАТИКА

5.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

5.1.1. Одномерные массивы, их обработка, суммирование элементов, поиск элемента по условию. Обработка двумерных массивов.

Массив в информатике — это тип данных, в котором хранится упорядоченный набор однотипных элементов.

Массивы есть в большинстве языков программирования и удобны для хранения нескольких значений и быстрой работы с ними.

В число базовых (стандартных) алгоритмов поэлементной обработки одномерных массивов можно включить алгоритмы решения следующих простых задач:

- Инициализация элементов массива.
- Вычисление (условной) суммы, произведения
- Подсчет количества (номера первого, последнего) элементов, удовлетворяющих заданному условию ($>$, $<$, $=$)
- Поиск (индекса) макс.(мин.) значения [среди удовлетворяющих заданному условию],
- Инвертирование.
- Сортировка

Шаблон большинства этих алгоритмов выглядит так:

[<инициализация>]

нц для k от 1 до n

| [если <условие> то]

| | <обработка k-го элемента массива x>

| [все]

кц

Здесь квадратные скобки означают необязательность заключенного в них фрагмента программы, угловые скобки ($<$ и $>$) вместе с их содержимым заменяются некоторым фрагментом кода, определяемым конкретным алгоритмом. Обработываемый массив x будем считать состоящим из n элементов с индексами от 1 до n .

- Инициализация элементов массива

1.1 Ввод из стандартного потока

1.2 Заполнение массива нулями

нц для k от 1 до n

| ввод $x[k]$

кц

нц для k от 1 до n

| $x[k] = 0$

кц

1.3 Заполнение квадратами индекса

1.4 Заполнение значениями функц(k)

нц для k от 1 до n

| $x[k] = k * k$

кц

1.5 Заполнение значениями $k!$

$p = 1$

нц для k от 1 до n

| $p = p * k$

| $x[k] = p$

кц

нц для k от 1 до n

| $x[k] = \text{функц}(k)$

кц

1.6 Заполнение числами Фибоначчи

$x[1] = 1$

$x[2] = 1$

нц для k от 3 до n

| $x[k] = x[k-2] + x[k-1]$

кц

- Вычисление (условной) суммы, произведения

2.1 Сумма элементов массива

$s = 0$

нц для k от 1 до n

| $s = s + x[k]$

кц

2.2 Произведение элементов массива

$p = 1$

нц для k от 1 до n

| $p = p * x[k]$

кц

2.3 Сумма четных элементов массива

$s = 0$

нц для k от 1 до n

| **если** $\text{mod}(x[k], 2) = 0$

| | **то** $s = s + x[k]$

| **все**

кц

2.4 Сумма элементов с четными номерами

$s = 0$

нц для k от 1 до n

| **если** $\text{mod}(k, 2) = 0$

| | **то** $s = s + x[k]$

| **все**

кц

- Подсчет количества (номера первого, последнего) элементов, удовлетворяющих заданному условию ($>$, $<$, $=$)

3.1 Поиск заданного значения T
(да/нет)

$\text{res} = \text{нет}$

нц для k от 1 до n

| **если** $x[k] = T$

| | **то** $\text{res} = \text{да}$

| | **выход**

| **все**

кц

3.2 Поиск заданного значения T
(сколько)

$\text{res} = 0$

нц для k от 1 до n

| **если** $x[k] = T$

| | **то** $\text{res} = \text{res} + 1$

| **все**

кц

3.3 Поиск заданного значения T (где - макс. индекс)

$\text{res} = 0$

нц для k от 1 до n

3.4 Поиск заданного значения T (где - мин. индекс)

$\text{res} = 0$

нц для k от 1 до n

```

|   если  $x[k] = T$ 
|   |   то  $res = k$ 
|   все
|
кц

```

```

|   если  $x[k] = T$ 
|   |   то  $res = k$ 
|   |   выход
|   все
|
кц

```

Вместо фильтра отбора « $x[k] = T$ » можно использовать другие фильтры в зависимости от формулировки задания.

- Поиск (индекса) макс.(мин.) значения

4.1 Поиск максимального значения элемента

```

 $res = x[1]$ 
нц для  $k$  от 1 до  $n$ 
|   если  $x[k] > res$ 
|   |   то  $res = x[k]$ 
|   все
|
кц

```

4.2 Поиск минимального значения элемента

```

 $res = x[1]$ 
нц для  $k$  от 1 до  $n$ 
|   если  $x[k] < res$ 
|   |   то  $res = x[k]$ 
|   все
|
кц

```

4.3 Поиск индекса максимального элемента

```

 $res = 1$ 
нц для  $k$  от 1 до  $n$ 
|   если  $x[k] > x[res]$ 
|   |   то  $res = k$ 
|   все
|
кц

```

4.4 Поиск индекса минимального элемента

```

 $res = 1$ 
нц для  $k$  от 1 до  $n$ 
|   если  $x[k] < x[res]$ 
|   |   то  $res = k$ 
|   все
|
кц

```

Стоит заметить, что фрагменты 4.3 и 4.4 обладают большей общностью, так как зная индекс k элемента можно получить доступ к его значению $x[k]$, а для нахождения индекса элемента по его значению нужно использовать фрагмент 3.3 или 3.4

- Поиск (индекса) макс.(мин.) значения среди удовлетворяющих заданному условию

4.5 Поиск индекса максимального значения среди элементов, удовлетворяющих фильтру <условие> (вариант 1)

```

 $res = 0$ 
нц для  $k$  от 1 до  $n$ 
|   если <условие>
|   |   то если  $res = 0$ 
|   |   |   то  $res = k$ 
|   |   |   иначе если  $x[k] > x[res]$ 
|   |   |   |   то  $res = k$ 
|   |   |   все
|   |   все
|
кц

```

```

|   все
кц
если res = 0
|   то вывод «ошибка»
все

```

4.6 Поиск индекса максимального значения среди элементов, удовлетворяющих фильтру <условие>(вариант 2)

```

res = 0
нц для k от 1 до n
|   если <условие>
|   |   то res = k
|   |   выход
|   все
если res = 0
|   то вывод «ошибка»
все
нц для k от res + 1 до n
|   если <условие> и x[k] > x[res]
|   |   то res = k
|   все
кц

```

5.1.2. Измерение количества информации.

Задание проверяет умение решать задачи на определение информационного объёма текстовых, графических и звуковых данных для процессов хранения этих данных и их передачи по каналам связи.

- Для определения информационного объёма **текстовых** данных используют алфавитный подход: по значению мощности алфавита ***N*** (количество символов в алфавите) определяется ***p*** – информационный вес символа (минимально достаточное количество битов для однозначного кодирования всех символов алфавита) как решение двойного неравенства:

$$2^{p-1} < N \leq 2^p.$$

Затем количество информации ***I_T*** в тексте, содержащем ***n*** символов, вычисляется по формуле:

$$I_T = n * p.$$

- Для определения информационного объёма **графических** данных, занимающих область размерами ***m*** х ***n*** пикселей и реализованных с использованием палитры, содержащей ***N*** цветов (аналог алфавита из предыдущего пункта), используют формулу

$$I_r = m * n * p,$$

где p – информационный вес (глубина) цвета в битах.

- Для вычисления информационного объёма **звуковых (музыкальных)** данных (объёма звукового файла) применяют формулу:

$$I_z = n * v * p * t,$$

где:

- n – количество каналов записи (моно – 1, стерео – 2, квадро – 4 и т.д.);
- v – частота дискретизации (количество «моментальных снимков» в секунду, герц);
- p – разрешение (глубина кодирования) – количество бит на хранение каждого «снимка»;
- t – длительность записи (в секундах).

5.1.3. Сравнение чисел, записанных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления и выполнение с ними арифметических действий.

Задание проверяет умение выполнять сравнение, сложение и вычитание чисел, записанных в двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления.

Выполнение операции перевода числа из системы счисления с основанием p (CC_p) в систему счисления с основанием q (CC_q) обычно выполняется по схеме $CC_p \rightarrow CC_{10} \rightarrow CC_q$ с применением операций умножения и деления. В случае, когда $p = 2^m$ и $q = 2^n$, эта операция может быть выполнена гораздо быстрее и без досадных арифметических ошибок по схеме $CC_p \rightarrow CC_2 \rightarrow CC_q$. Правда для этого потребуются составить несколько несложных таблиц и постараться их запомнить. В информатике они встречаются довольно часто и их знание не раз может пригодиться.

4	2	16	2
0	00	0	0000
1	01	1	0001
2	10	2	0010
3	11	3	0011
		4	0100
		5	0101
		6	0110
		7	0111
8	2	8	1000
0	000	9	1001
1	001	A	1010
2	010	B	1011
3	011	C	1100
4	100	D	1101
5	101	E	1110
6	110		

Каждая из них содержит перевод всех цифр

7	111
---	-----

F	1111
---	------

 CC_p в двоичную систему счисления. Для удобства запоминания и последующего восстановления отметим несколько особенностей:

- Таблица для CC_p , $p = 2^m$ во втором столбце содержит группы из m двоичных цифр (их называют диады ($m = 2$), триады ($m = 3$), тетрады ($m = 4$) и т.д..
- Двоичное представление цифр '0' и '1' во всех системах выглядят одинаково, отличаясь лишь количеством незначащих нулей впереди.
- Нижняя половина каждой таблицы дублирует верхнюю ее половину с заменой крайнего левого нуля на единицу.
- Каждая таблица переносится в верхнюю половину следующей таблицы с добавлением слева незначащего нуля.

Приведем пример использования этих таблиц при переводе числа $D51F_{16}$ в CC_8 :

1. Заменяем каждую 16-ричную цифру тетрадой из 3-ей таблицы:

$$D51F_{16} = \frac{1101}{D} \frac{0101}{5} \frac{0001}{1} \frac{1111}{F}_2.$$

2. Разобьём полученную строку **справа налево** на триады (если самая левая триада окажется неполной, добавим необходимое количество нулей) и заменим каждую триаду соответствующей цифрой из 2-ой таблицы:

$$\frac{001}{1} \frac{101}{5} \frac{010}{2} \frac{100}{4} \frac{011}{3} \frac{111}{7}_2 = 152437_8$$

Операции сложения и вычитания в CC_p выполняются по тем же правилам, что и в привычной десятичной системе, но учитывается то, что «десяток» в CC_p содержит p единиц. Если в операции участвуют буквы (основание системы счисления >10), они заменяются числовыми значениями (A – 10, B – 11, C – 12, D – 13, E – 14, F – 15, ...)

Примеры:

$$5_8 + 6_8 = 13_8, \text{ так как } 5+6 = 11 = 8+3 = 10_8+3_8$$

$$C_{16} + E_{16} = 12+14 = 26 = 16+10 = 10_{16} + A = 1A_{16}$$

5.1.4. Основные законы алгебры логики. Операции «импликация», «эквиваленция». Эквивалентные преобразования логических выражений

Задание проверяет знание базовых законов алгебры логики, умение сравнивать функции между собой по теоретическим описаниям и таблицам истинности.

Одним из важных этапов при решении задач, связанных с алгеброй логики, является «перевод» условия задачи на формальный математический язык. При этом часто вызывает затруднение процесс определения соответствия того или иного словосочетания (логической связки) конкретной логической операции. В качестве примеров рассмотрим несколько ситуаций, начиная с простейших:

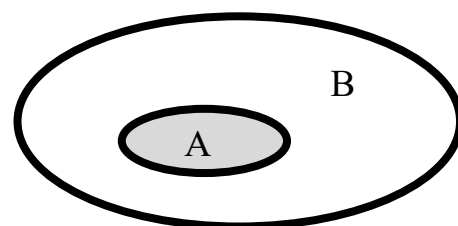
Логические связки	Логическая операция
«не», «неверно, что»	отрицание
«и», «а», «но», «хотя», «однако»	конъюнкция (логическое умножение)
«либо ... либо»	неравнозначность (исключающее <i>или</i>)
«или»	неравнозначность, реже дизъюнкция (логическое сложение)
«если ... то», «... влечет...», «из ... следует ...»	импликация
«... равносильно ...»	равнозначность (эквивалентность)

При доказательстве эквивалентности двух утверждений в математике часто используются в качестве логических связок более сложные словосочетания:

- «...необходимо и достаточно для...»
- «...тогда и только тогда, когда...»
- «...в том и только в том случае, когда ...»

Каждая из этих связок состоит из двух частей: прямой и обратной. Для того, чтобы было проще разбираться, какая логическая операция соответствует этим частям, рассмотрим следующий рисунок, иллюстрирующий отношение включения множества A в множество B .

Очевидно, что если истинно утверждение $x \in A$, то утверждение $x \in B$ также истинно. Другими словами, « A достаточно для B » соответствует операции « $A \rightarrow B$ ».



Логические связки	Логическая операция
« A необходимо для B »	$B \rightarrow A$
« A достаточно для B »	$A \rightarrow B$
« A тогда, когда B »	$B \rightarrow A$
« A только тогда, когда B »	$A \rightarrow B$
« A в том случае, когда B »	$B \rightarrow A$
« A только в том случае, когда B »	$A \rightarrow B$

5.2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. РАЗБОР ЗАДАЧ ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА.

5.2.1. Решение задачи 5 (базовый уровень). Задание проверяет знание базовых алгоритмов поэлементной обработки одномерных массивов.

Для массива $x[1..N]$ фрагмент алгоритма на псевдокоде

```
s := 0
нц для k от N до 1 шаг -1
|   если ( 0 > x[ k ] )
|   |   то s := k
|   все
кц
```

определяет:

- 1) минимальный элемент массива
- 2) сумму отрицательных элементов массива
- 3) количество отрицательных элементов массива
- 4) максимальный индекс отрицательного элемента массива
- 5) минимальный индекс отрицательного элемента массива

Решение:

Внимательное чтение фрагмента позволяет выделить следующие ключевые факторы:

1. Перебор индексов от максимального к минимальному значению.
2. Установлен фильтр « $x[k] < 0$ » (для удобства переписан справа налево).
3. В переменной s сохраняется индекс элемента массива.

Учет всех этих факторов однозначно приводит к выводу, что
правильный ответ 5

5.2.2. Решение задачи 6 (базовый уровень).

Музыкальный фрагмент был записан в формате квадрато (четырёхканальная запись), оцифрован и сохранён в виде файла без использования сжатия данных. Размер полученного файла – 24 Мбайт. Затем тот же музыкальный фрагмент был записан повторно в формате стерео (двухканальная запись) и оцифрован с разрешением (глубиной кодирования) в 4 раза выше и частотой дискретизации в 2 раза меньше, чем в первый раз. Сжатие данных не производилось. Укажите размер в Мбайт файла, полученного при повторной записи. В ответе запишите только целое число, единицу измерения писать не нужно.

Решение:

Очевидно, что формула, приведенная выше для расчета информационного объема звуковых данных, свидетельствует о прямой пропорциональной зависимости этого показателя от значений, входящих в правую часть выражения. Изменение размера файла, полученного при повторной записи музыкального фрагмента при последовательном учете изменения параметров записи, можно оформить в виде таблицы:

Исходный объем	Количество каналов	Глубина кодирования	Частота дискретизации
	В 2 раза меньше	В 4 раза больше	В 2 раза меньше
24	$24:2 = 12$	$12 \times 4 = 48$	$48:2 = 24$

Ответ: 24

5.2.3. Решение задачи 8 (повышенный уровень).

Для чисел, заданных в различных системах счисления:

$$X = 1C_{16}, Y = 11001_2, Z = 32_8,$$

определить значение выражения $2 \cdot \min(X, Y, Z) + \max(X, Y, Z)$.

Ответ записать в виде восьмеричного числа без указания основания системы счисления.

Решение:

Переведем числа X и Y в CC_8 :

$$X = 1C_{16} = 00011100_2 = 34_8 \quad Y = 11001_2 = 31_8.$$

Очевидно, что минимальное из трех чисел - 31_8 , а максимальное - 34_8
 $2 \cdot 31_8 + 34_8 = 62_8 + 34_8 = 116_8$.

Ответ: 116

5.2.4. Решение задачи 11 (повышенный уровень).

Три роты курсантов (обозначим их A , B и C) претендовали на призовые места в соревнованиях по стрельбе из автомата. Военные специалисты, входившие в состав жюри соревнований, высказали следующие предположения по поводу результатов соревнований:

- 4) то, что рота C войдет в число призеров, не является необходимым для того, чтобы роты A и B стали призерами одновременно;
- 5) рота B станет призером только тогда, когда призерство роты A не будет достаточным основанием для призерства роты C ;
- 6) призерство роты A равносильно тому, что в число призеров войдет хотя бы одна из рот B и C .

После окончания соревнований оказалось, что одно из трех предположений ложно.

Это означает, что в число призеров вошли роты

- 1) A,C 2) A,B,C 3) A,B 4) B,C 5) A

Решение:

Очистив формулировки предположений от лишних слов, получим:

- | | |
|---|--|
| 1) не (C необходимо для (A и B)); | $\overline{(AB) \rightarrow C}$ |
| 2) B только тогда, когда не (A достаточно для C); | $B \rightarrow \overline{A \rightarrow C}$ |
| 3) A равносильно (хотя бы одно из B и C). | $A \equiv (B + C)$ |

Упрощение логических выражений:

- 1) $\overline{(AB) \rightarrow C} = \text{/отрицание импликации/} = (AB\bar{C}) = A\bar{B}\bar{C}$
- 2) $B \rightarrow \neg(A \rightarrow C) = \bar{B} + A\bar{C}$
- 3) $A \equiv (B + C) = A(B + C) + \bar{A}\bar{B} + \bar{C} = AB + AC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

Для полученных выражений составим общую таблицу истинности

	ABC	$A\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B} + A\bar{C}$	$AB + AC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
1	101	0	1	1
2	111	0	0	1
3	110	1	1	1
4	011	0	0	0
5	100	0	1	0

Лишь одна строка этой таблицы истинности отвечает условию «одно из трех предположений ложно», значит правильный ответ – 1.

Ответ: 1

6. ФИЗИКА

6.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

6.1.1. Емкость удлинённого проводника. Конденсатор. Виды конденсаторов. Ёмкость плоского конденсатора. Соединение конденсаторов. Энергия конденсатора.

1.4 Постоянный электрический ток. Закон Ома для участка цепи. Закон Ома для полной цепи. Закон Джоуля - Ленца. Правила последовательного и параллельного соединения проводников.

6. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

6.1. Решение задачи 7.

6.2. Решение задачи 9.

6.3. Решение задачи 10.

6.4. Решение задачи 12.

2.5 Типовые ошибки в решении задачи.

5 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Емкость удлинённого проводника.

Уединённым проводником называют проводник, удалённый от других проводников, тел и зарядов.

Потенциал уединённого проводника прямо пропорционален его заряду. Разные проводники, будучи одинаково заряженными, принимают различные потенциалы. Для уединённого проводника можно записать следующее соотношение:

$$q = C\varphi$$

где C – коэффициент пропорциональности.

Величина $C = \frac{q}{\varphi}$ называется емкостью (или просто емкостью) уединённого проводника. Емкость уединённого проводника зависит от его

размеров, формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника.

Единица измерения емкости – фарад. Фарад – это емкость проводника, потенциал которого изменяется на 1В при сообщении ему заряда 1 Кл. $[C] = 1 \text{ Фарад} = 1 \text{ Кл} / \text{В}$.

Конденсаторы. Виды конденсаторов.

Уединённые проводники имеют малую емкость. Система проводников обладает значительно большей емкостью. В жизни необходимы устройства, обладающие способностью накапливать значительный по величине заряд. Такие устройства называются **конденсаторами**. Они обладают способностью при малых размерах и небольших, относительно окружающих тел потенциалах, накапливать значительные по величине заряды. Простейший конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных между собой диэлектриком (Рис 1).

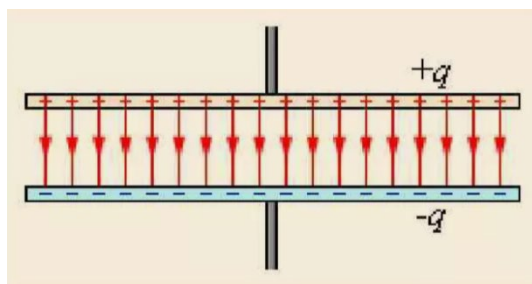


Рис.1

На обкладках находятся заряды противоположные по знаку, но равные по величине. Расстояние между обкладками конденсатора намного меньше его линейных размеров.

Для того, чтобы исключить влияние окружающих тел на емкость, проводникам придают такую форму, чтобы поле, было сосредоточено в узком зазоре между пластинами конденсатора. Такому условию отвечают:

- 1) две плоские пластины (Рис. 2, Рис. 3);

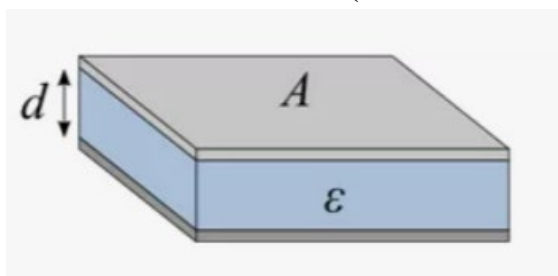


Рис. 2



Рис. 3

Такие конденсаторы называются плоскими

2) два коаксиальных цилиндра (Рис. 4, Рис. 5);

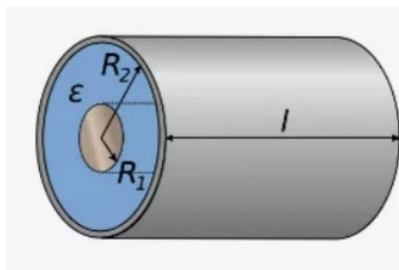


Рис. 4



Рис. 5

Такие конденсаторы называются цилиндрическими

3) две концентрические сферы (Рис. 6, Рис. 7);

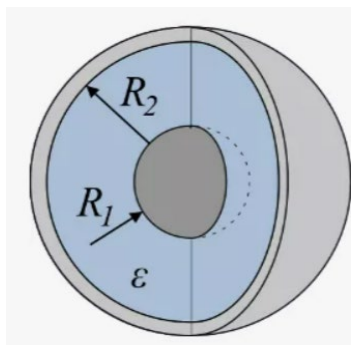


Рис. 6



Рис. 7

Такие конденсаторы называются сферическими.

Ёмкость плоского конденсатора

Под емкостью конденсатора понимается физическая величина равная отношению заряда q накопленного на обкладке конденсатора к разности потенциалов между его обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-}$$

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и заканчиваются на другой. Свободные заряды, возникающие на разных обкладках, равны по модулю, но противоположны по знаку.

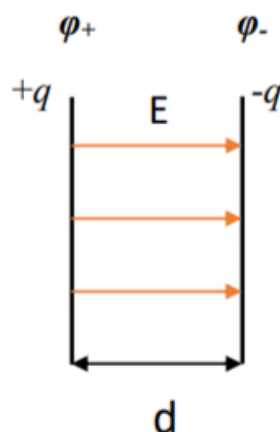


Рис. 8

Рассмотрим плоский конденсатор, состоящий из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга и имеющих заряды $+q$ и $-q$. Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то краевыми эффектами можно пренебречь и поле между обкладками можно считать однородным ($d \ll l$).

Напряженность поля внутри конденсатора с диэлектриком:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}$$

Разность потенциалов между обкладками:

$$\varphi_+ - \varphi_- = Ed = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}$$

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_+ - \varphi_-} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$$

Соединение конденсаторов

Для увеличения емкости и варьирования её возможных значений конденсаторы объединяют в батареи, при этом используют их параллельное и последовательное соединения.

При **последовательном соединении**, конденсаторы подключают таким образом, что только первый и последний конденсатор подключены к источнику ЭДС тока одной из своих пластин. Заряд одинаков на всех пластинах, но

внешние заряжаются от источника, а внутренние образуются только за счет разделения зарядов, ранее нейтрализовавших друг друга. При этом заряд конденсаторов в батарее меньше, чем, если бы каждый конденсатор подключался бы отдельно. Следовательно, и общая емкость батареи конденсаторов меньше.

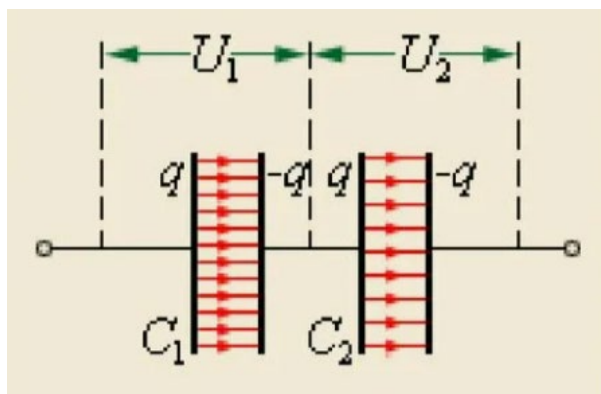


Рис. 9

Напряжение на данном участке цепи соотносится следующим образом:

$$U = U_1 + U_2$$

Зная, что напряжение конденсатора можно представить через заряд и емкость, запишем:

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$

Сократив выражение на q , получим:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Если в батарею соединяются n конденсаторов, то:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

При **параллельном соединении** конденсаторов напряжение на обкладках одинаковое, а заряды разные.

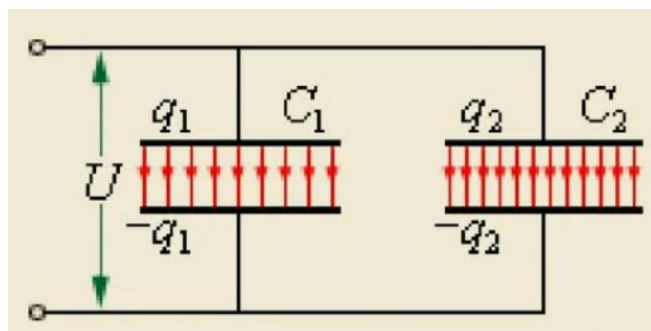


Рис. 10

Величина общего заряда, полученного конденсаторами, равна сумме зарядов всех параллельно подключенных конденсаторов. В случае батареи из двух конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2$$

Так как заряд конденсатора $q = CU$, напряжения на каждом из конденсаторов равны, получаем следующее выражение для эквивалентной емкости двух параллельно соединенных конденсаторов:

$$CU = C_1U + C_2U$$

$$C = C_1 + C_2$$

Если в батарею соединяются n конденсаторов, то:

$$C = C_1 + \dots + C_n$$

Энергия конденсатора

Энергия заряженного конденсатора равна работе внешних сил, которую необходимо затратить, чтобы зарядить конденсатор. Процесс зарядки конденсатора можно представить как последовательный перенос достаточно малых порций заряда $\Delta q > 0$ с одной обкладки на другую (Рис. 11).

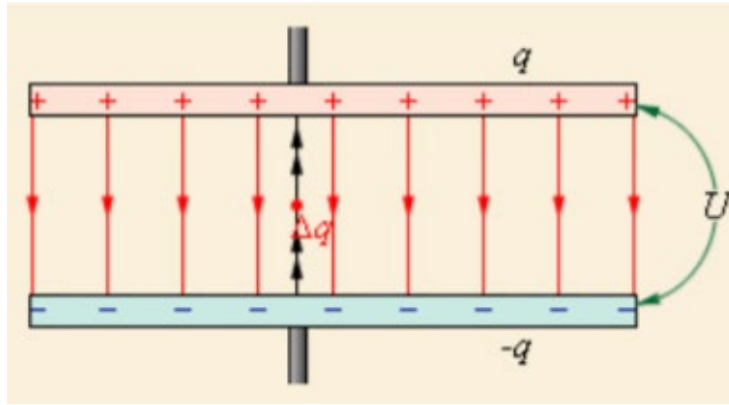


Рис. 11

При этом одна обкладка постепенно заряжается положительным зарядом, а другая – отрицательным. Поскольку каждая порция переносится в условиях, когда на обкладках уже имеется некоторый заряд q , а между ними существует некоторая разность потенциалов:

$$U = \frac{q}{C}$$

При переносе каждой порции dq внешние силы должны совершить работу:

$$dA = U dq = \frac{q}{C} dq$$

Энергия W конденсатора емкости C , заряженного зарядом q , может быть найдена путем интегрирования этого выражения в пределах от 0 до Q :

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Если воспользоваться соотношением $Q = CU$, то можно переписать формулу, выражающую энергию заряженного конденсатора в другой эквивалентной форме:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}$$

Электрическую энергию W следует рассматривать как потенциальную энергию, запасенную в заряженном конденсаторе. По современным представлениям, электрическая энергия конденсатора локализована в пространстве между обкладками конденсатора, то есть в электрическом поле. Поэтому ее называют энергией электрического поля.

6.1.2. Второй закон Ньютона для материальной точки в ИСО. Третий закон Ньютона для материальных точек. Сила упругости. Закон Гука. Сила трения. Сухое трение. Сила трения скольжения и сила трения покоя. Коэффициент трения.

Первый закон Ньютона: всякое тело сохраняет своё состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока внешнее воздействие не заставит его изменить это состояние. Первый закон Ньютона утверждает, что состояние покоя или равномерного прямолинейного движения не требует для своего поддержания каких-либо внешних воздействий.

Силой называется векторная физическая величина, являющаяся мерой воздействия на материальную точку или тело со стороны других тел или полей, в результате чего материальная точка или тело приобретает ускорение или тело деформируется. Совокупность физических тел, у которых взаимодействия с внешними телами отсутствуют или скомпенсированы, называется замкнутой (изолированной) системой. Сила полностью определена, если заданы её модуль, направление и точка приложения. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Одновременное действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию одной силы, называемой равнодействующей или результирующей силой и равной их геометрической сумме:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Это выражение представляет собой принцип суперпозиции сил. $\square$

Масса тела m – скалярная физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая её инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. Размерность массы в системе СИ $[m] = 1 \text{ кг}$. В классической (ньютоновской) механике массой материальной точки называется положительная скалярная величина, являющаяся мерой инертности этой точки.

Основным законом динамики материальной точки является **второй закон Ньютона**, который говорит о том, как изменяется механическое движение материальной точки или тела под действием приложенных к ней сил. В инерциальной системе отсчета ускорение, приобретаемое материальной точкой или телом под действием силы, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе материальной точки или тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Или в инерциальной системе отсчёта произведение массы материальной точки или тела на ускорение равно действующей на материальную точку или тело силе:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Третий закон Ньютона. Количественное описание механического взаимодействия тел было дано Ньютоном в его третьем законе динамики: действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны. Можно дать и более упрощённую формулировку третьего закона Ньютона: как бы ни происходило механическое взаимодействие между телами, тела эти не только взаимно действуют друг на друга, но действуют всегда с равными по величине и противоположно направленными силами.

Применительно, к материальным точкам третий закон Ньютона может быть сформулирован в виде: материальные точки попарно действуют друг на друга с силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль одной прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению. Закон отражает принцип парного взаимодействия. То есть все силы в природе рождаются парами. Если $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй, а $\vec{F}_{21}$ - сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой, то согласно третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Виды сил в механике. Наиболее простыми видами сил являются такие, которые обусловлены непосредственным механическим действием одного тела на другое при их соприкосновении, к ним относятся: силы тяги, трения, давления, упругости, натяжения. Остановимся лишь на некоторых из них.

Силы упругости. Силы, возникающие при упругой деформации тел, называются силами упругости. Эти силы действуют между соприкасающимися слоями деформируемого тела, а также в месте контакта деформируемого тела с телом, вызывающим деформацию.

Сила упругости, действующая на тело со стороны опоры или подвеса, называется силой реакции опоры или силой натяжения подвеса.

Закон Гука: сила упругости пропорциональна вектору удлинения (сжатия) и противоположна ему по направлению:

$$F_{\text{упр}} = -k\Delta x,$$

где k - жёсткость тела – величина, определяемая силой упругости, возникающей при единичной деформации данного тела; Δx – величина, характеризующая одномерное (линейное) растяжение (сжатие).

Силы трения. При всяком перемещении одного тела по поверхности другого возникает сопротивление этому движению, которое мы представляем себе как силу трения, направленную против этого движения. Трение между поверхностями двух соприкасающихся твёрдых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки называется **сухим трением**. Трение между поверхностью твёрдого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой тело движется, называется **жидким** или **вязким трением**. Сухое трение подразделяют на:

трение покоя – трение при отсутствии относительного перемещения соприкасающихся тел; □

трение скольжения – трение при относительном движении соприкасающихся тел.

Сила трения, препятствующая возникновению движения одного тела по поверхности другого, называется силой трения покоя.

Экспериментально показано, что сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления:

$$F = \mu N$$

Безразмерный множитель μ называется коэффициентом трения скольжения, который обычно принимают равным коэффициенту трения покоя и называют просто коэффициентом трения.

6.1.3. Газовые законы, уравнение Менделеева-Клапейрона, закон Дальтона. Изопроцессы в идеальном газе с постоянным количеством вещества: изотерма, изохора, изобара, графическое представление изопроцессов.

Если какой-либо из внешних параметров системы изменяется, то происходит изменение состояния термодинамической системы, называемое термодинамическим процессом. Термодинамический процесс называется равновесным (равновесный, квазистатический процесс), если система бесконечно медленно проходит непрерывный ряд бесконечно близких термодинамических равновесных состояний. Все процессы, которые не удовлетворяют перечисленным условиям, называются неравновесными. Реальные процессы неравновесны, т.к. происходят с конечной скоростью. Однако они тем ближе к равновесным, чем медленнее происходят.

Изопроцессы – термодинамические процессы, происходящие в системе с постоянной массой при каком-либо одном постоянном параметре состояния.

Изотермический процесс происходит при постоянной температуре $\Delta T = \text{const}$.

Изохорический (изохорный) **процесс** происходит при постоянном объёме $\Delta V = \text{const}$.

Изобарический (изобарный) **процесс** протекает при постоянном давлении $\Delta p = \text{const}$.

Адиабатический (адиабатный) **процесс** – термодинамический процесс, который происходит в системе без теплообмена с внешними телами.

Газовые законы.

Закон Бойля-Мариотта: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная $pV = \text{const}$. При $T = \text{const}$; $m = \text{const}$. Для 2-х состояний $p_1 V_1 = p_2 V_2$. Изотерма – кривая, изображающая зависимость между величинами p и V , характеризующими свойства вещества при постоянной температуре. Изотермы представляют собой равнобочные гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс.

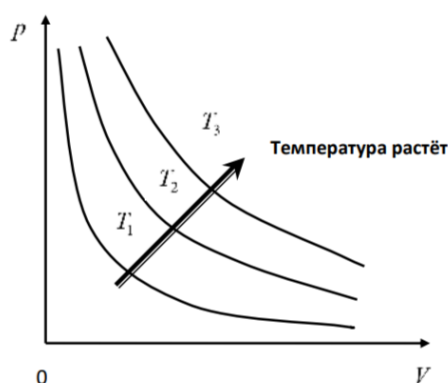


Рис. 12

Закон Гей-Люссака: объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой.

При $p = \text{const}$; $m = \text{const}$

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

Для 2-х состояний:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \square$$

На диаграмме в координатах V, t этот процесс изображается прямой, называемой изобарой.

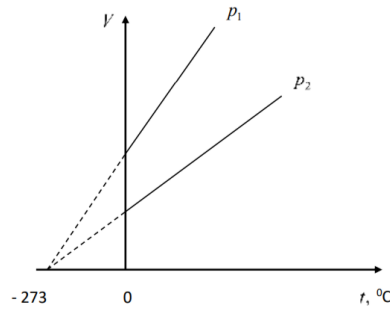


Рис. 13

Закон Шарля: давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой. При $V = \text{const}$; $m = \text{const}$

$$\frac{p}{T} = \text{const.}$$

Для двух состояний:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \square$$

На диаграмме в координатах p, t этот процесс изображается прямой, называемой изохорой.

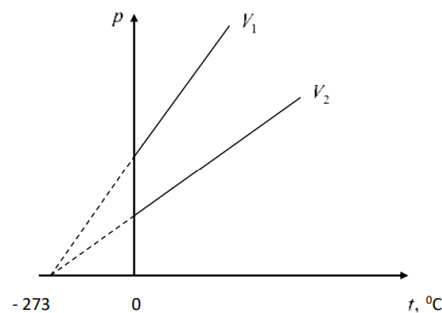


Рис. 14

Французский физик и инженер Б. Клапейрон вывел уравнение состояния идеального газа, объединив законы Бойля-Мариотта и ГейЛюссака. Уравнение Клапейрона, для данной массы газ:

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \quad \square$$

Для 2-х состояний:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \quad \square$$

Русский учёный Д.И. Менделеев усовершенствовал уравнение Клапейрона, введя универсальную газовую постоянную R и постоянную Больцмана k . Уравнение Менделеева-Клапейрона (уравнение состояния идеального газа), для любой массы газа имеет вид:

$$pV = \nu RT$$

где $R = 8,31 \text{ Дж/моль К}$ – универсальная газовая постоянная.

Закон Дальтона (давление смеси газов): если в сосуде находится смесь нескольких газов, не вступающих друг с другом в химические реакции, то давление смеси газов равно сумме давлений, производимых каждым газом в отдельности, если бы он один занимал весь сосуд (парциальные давления):

$$p = p_1 + \dots + p_n$$

1.4 Постоянный электрический ток.

Электрическим током называется упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. . Количественной мерой электрического тока служит сила тока I – скалярная величина, определяемая количеством заряда, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Размерность силы тока в системе СИ $[I] = 1 \text{ А}$ (Ампер).

Характеристики электрических цепей.

Для поддержания постоянного тока в цепи необходимо в цепи наличие устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет работы сил неэлектростатического происхождения. Такие устройства называются источниками тока. Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источника тока, называются сторонними силами. Природа сторонних сил может иметь химическое, магнитное и другое происхождение. Сторонние силы совершают работу по перемещению зарядов. Физическая величина, определяемая работой сторонних сил по перемещению

единичного положительного заряда, называется электродвижущей силой (Э.Д.С.) $\mathcal{E}$, действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}$$

Размерность $[\mathcal{E}] = 1\text{В}$. На электрических схемах источник тока изображается следующим образом:



Рис.10

Во внешней цепи источник тока создает ток, направленный от « + » к « - ». Внутри источника ток течет от « - » к « + ». Внешний участок цепи – это устройства, потребляющие электрический ток (так называемая «нагрузка»), которые с помощью соединительных проводов соединяются с источником тока. Внешнее сопротивление обозначается буквой R , внутреннее сопротивление источника тока обозначается буквой r . На электрических схемах сопротивление обозначается значком:



Рис.15

Закон Ома для однородного участка цепи.



Рис.16

Однородный участок цепи не содержит источника тока, следовательно $\varphi_1 - \varphi_2 = U$. Немецкий физик Георг Ом экспериментально установил, что сила тока, протекающая по однородному проводнику, пропорциональна напряжению на концах проводника:

$$I = \frac{U}{R}$$

R – сопротивление проводника. Размерность $[R] = 1\text{В}/\text{А} = 1\text{Ом}$.

Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан. Для однородного цилиндрического проводника, с постоянным сечением по всей длине

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где l – длина проводника,

S - площадь поперечного сечения,

ρ –удельное сопротивление материала проводника.

Размерность $[\rho] = 1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Удельное сопротивление и сопротивление проводника зависят от температуры. Для металлов, при не очень высоких температурах, эта зависимость в первом приближении является линейной:

$$R = R_0 (1 + \alpha t),$$

Где α – температурный коэффициент сопротивления.

Закон Ома для замкнутой цепи.

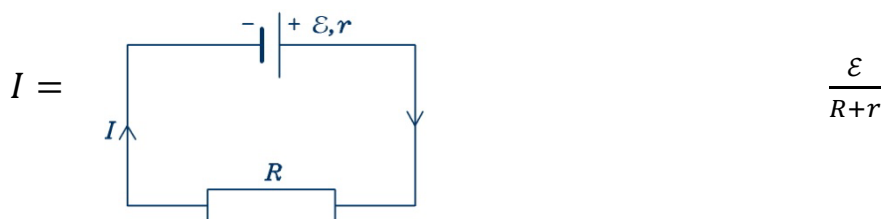


Рис.17

$\mathcal{E}$ - ЭДС источника тока, R - внешнее сопротивление, r - внутреннее сопротивление источника тока, I - сила тока.

Соединение сопротивлений.

Последовательное соединение сопротивлений.

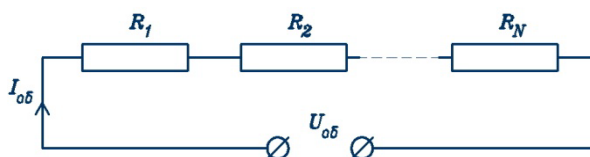


Рис.18

При последовательном соединении сопротивлений токи, текущие через каждое сопротивление одинаковы

$$I_1 = I_2 = \dots = I_{o\delta},$$

а напряжение на участке равно сумме падений напряжения на каждом сопротивлении

$$U_{об} = U_1 + U_2 + \dots + U_N.$$

Пользуясь законом Ома для участка цепи, получим:

$$I_{об} R_{об} = I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots$$

Сокращая на I , получим:

$$R_{об} = R_1 + R_2 + \dots$$

Для n одинаковых сопротивлений

$$R_{об} = n R_1$$

Параллельное соединение сопротивлений.

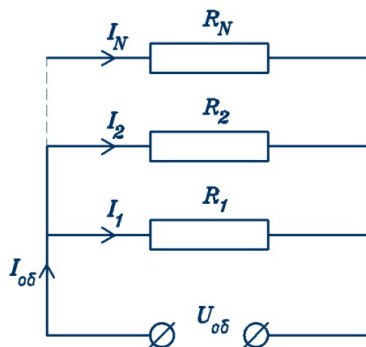


Рис. 19

При параллельном соединении сопротивлений общее напряжение на участке равно напряжению на каждом сопротивлении:

$$U_{об} = U_1 = U_2 = \dots,$$

а общий ток (до разветвления) равен сумме токов, текущих через каждое сопротивление:

$$I_{об} = I_1 + I_2 + \dots$$

Пользуясь законом Ома для участка цепи, получим:

$$\frac{U_{об}}{R_{об}} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \dots$$

Сокращая на U , получим:

$$\frac{1}{R_{об}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

Для n одинаковых сопротивлений:

$$R_{об} = \frac{R_1}{n}$$

Тепловые действия тока.

Ток, проходя по проводнику, нагревает его. Для однородного проводника работа по перемещению заряда:

$$A = U\Delta q = IU\Delta t$$

Работа, совершаемая в единицу времени, есть мощность:

$$N = \frac{A}{t} = IU = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Если ток протекает по неподвижному проводнику, то вся работа идет на нагревание проводника. Согласно закону сохранения энергии $A = Q$.

Закон Джоуля – Ленца:

Количество теплоты, выделившейся в проводнике, равно произведению силы тока на напряжение и на время прохождения тока.

$$Q = IU\Delta t = I^2 R\Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t$$

6.2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. РАЗБОР ЗАДАЧ ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ВАРИАНТА

6.2.1. Решение задачи 7 (базовый уровень).

Для усовершенствования цепи обратной связи, в строение плоского воздушного конденсатора внесли следующие изменения: не меня площади пластин, расстояние между его обкладками уменьшили на 25% и заполнили диэлектриком. В результате электроёмкость увеличилась в 5,5 раза. По данным таблицы 1 определите вещество, которым был заполнен конденсатор. В ответе укажите номер выбранного вами вещества.

Таблица 1 - Диэлектрическая проницаемость некоторых веществ (при температуре 200 С)

№	Вещество	Диэлектрическая проницаемость
1	Слюда	5,7 - 7
2	Фарфор	6 - 8
3	Стекло	4 - 7
4	Парафин	2,1 - 2,2
5	Битум	2,5 - 3

Дано: $d_2 = 0,75d_1$, $C_2 = 5,5C_1$

Найти: ϵ -?

Решение: По формуле электроёмкости плоского конденсатора:

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d_1} \quad (14), \text{ т.к. для воздушного конденсатора } \epsilon = 1$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d_2} \quad (15)$$

Используя выражения (14) и (15), получим:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{0,75 d_1} = \frac{\varepsilon C_1}{0,75} \quad (16)$$

По условию задачи $C_2 = 5,5 C_1$. Подставим выражение (16):

$$\frac{\varepsilon C_1}{0,75} = 5,5 C_1$$

$$\varepsilon = 5,5 \cdot 0,75 = 4,125$$

Сравним полученное значение с данными таблицы. Значение $\varepsilon = 4,125$ принадлежит интервалу 4 - 7, т.е. ответ 3 стекло.

Ответ: 3

6.2.2. Решение задачи 9 (повышенный уровень).

Мальчик толкает лежащий на горизонтальной поверхности брусок с силой, направленной горизонтально и равной $1/4$ силы тяжести, действующей на брусок. Спустя некоторое время t , мальчик прекращает толкать брусок. Найдите это время t , если известно, что полный путь, пройденный телом от начала движения до остановки, равен 30 м, а коэффициент трения бруска о поверхность 0,1. $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Дано: $F = \frac{1}{4} mg$, $S = 30 \text{ м}$, $\mu = 0,1$, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Найти: t -?

Решение:

Весь путь, пройденный телом: $S = S_1 + S_2 = 30 \text{ м}$

Пока мальчик толкал брусок, движение было равноускоренным. При этом на первом участке пути брусок прошел расстояние:

$$S_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$$

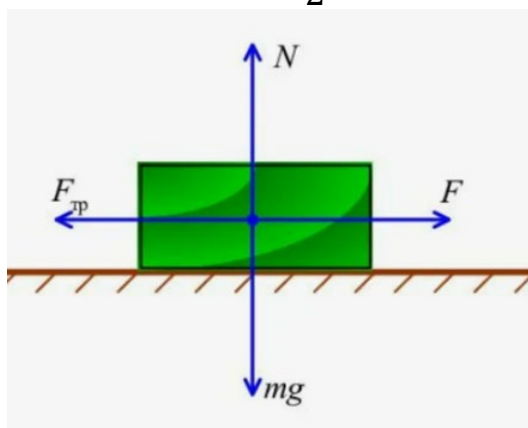


Рис. 20

По второму закону Ньютона на ОХ:

$$ma_1 = F - F_{\text{тр}}$$

На ОУ:

$$N = mg$$

Сила трения: $F_{\text{тр}} = \mu N$, следовательно: $F_{\text{тр}} = \mu mg$.

Объединив выражения, получим:

$$ma_1 = \frac{1}{4}mg - \mu mg \Rightarrow a_1 = (\frac{1}{4} - \mu)g = 0,15g$$

$$S_1 = \frac{0,15gt^2}{2}$$

Скорость в конце первого этапа: $v = a_1 t$

Рассмотрим второй участок пути. По второму закону Ньютона на ОХ:

$$ma_2 = F_{\text{тр}} \Rightarrow ma_2 = \mu mg \Rightarrow a_2 = \mu g = 0,1g$$

$$S_2 = \frac{v^2}{2a_2} = \frac{a_1^2 t^2}{2 \cdot 0,1g} = \frac{(0,15g)^2 t^2}{2 \cdot 0,1g} = \frac{0,225gt^2}{2}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{0,15gt^2}{2} + \frac{0,225gt^2}{2} = \frac{0,375gt^2}{2}$$

$$\text{Отсюда находим: } t = \sqrt{\frac{2S}{0,375g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{0,375 \cdot 10}} = 4\text{с}$$

Ответ: 4

6.2.3. Решение задачи 10 (базовый уровень).

Надувной матрас был накачан утром, когда температура воздуха была 16°C . На сколько процентов увеличилось давление в матрасе, если днём под воздействием солнечных лучей он прогрелся до 25°C ? Считать, что объем матраса не изменится. Ответ округлить до целых.

Дано: $t_1 = 16^{\circ}\text{C}$, $t_2 = 25^{\circ}\text{C}$, $V = \text{const}$

Найти: Δp (%) -?

Решение: По закону Шарля ($V = \text{const}$):

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow T_1 p_2 = T_2 p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1$$

Переведём температуру: $T_1 = 16 + 273 = 289\text{ K}$;

$$T_2 = 25 + 273 = 298\text{ K}.$$

$$p_2 = \frac{298}{289} p_1 = 1,03 p_1$$

Следовательно, $\Delta p = 3\%$

Ответ: 3

6.2.4. Решение задачи 12 (повышенный уровень).

Найдите внутреннее сопротивление источника тока, изображённого на схеме (см. Рис.1), если $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$. При этом известно, что при замкнутом ключе К через резистор R_2 течёт ток $I_2 = 2 \text{ А}$, а при разомкнутом - через резистор R_1 течёт ток $I_1 = 5,6 \text{ А}$.

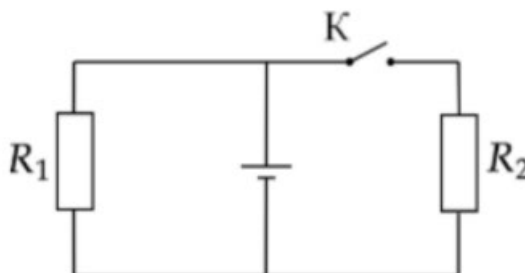


Рис.1

Дано: $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $I_1 = 5,6 \text{ А}$, $I_2 = 2 \text{ А}$

Найти: r -?

Решение:

При разомкнутом ключе ток течёт только в левом контуре цепи. При этом, по закону Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r} \Rightarrow \varepsilon = I_1 R_1 + I_1 r$$

При замкнутом ключе ток течёт в обоих контурах. Аналогично находим:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \Rightarrow \varepsilon = IR + Ir$$

где полный ток через источник $I = I'_1 + I_2$,

а $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{4}{3} \text{ Ом}$ - общее сопротивление параллельно соединённых резисторов R_1 и R_2 .

$$I'_1 R_1 = I_2 R_2 \Rightarrow I'_1 = \frac{I_2 R_2}{R_1} \Rightarrow I = \frac{I_2 (R_2 + R_1)}{R_1} = \frac{2(4+2)}{2} = 6 \text{ А}$$

Приравняем выражения для ЭДС, полученные выше:

$$I_1 R_1 + I_1 r = IR + Ir \Rightarrow r = \frac{IR - I_1 R_1}{I_1 - I}$$

$$r = \frac{6 \cdot \frac{4}{3} - 5,6 \cdot 2}{5,6 - 6} = 8 \text{ Ом}$$

Ответ: 8

6.2.5. Типовые ошибки в решении задачи

При решении задачи возможно возникновение ряда характерных ошибок:

- 1) Перевод данных в СИ; перевод температуры в Кельвины;
- 2) Ошибки вычислений;
- 3) Ошибки при фиксации результатов.

Ошибки возникают при неправильном переводе заданных физических величин в СИ.

Ошибки вычислений возникают подстановке в расчетную формулу ошибочных данных, а также при неверных преобразованиях алгебраических выражений и арифметических операций над числами.

Ошибки при фиксации результатов могут возникнуть при выполнении требования округления конечного ответа до определённого разряда.

Для недопущения подобных ошибок рекомендуется быть внимательным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических рекомендациях для выполнения конкурсных заданий по теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «Кадетский класс» по единому направлению рассмотрен теоретический минимум для решения конкурсных задач по математике, информатике и физике. Разобраны все задания демонстрационного варианта базового и повышенного уровня сложности. Рассмотрены основные ошибки, приводящие к неверному ответу. Представленный методический материал позволяет лучше понять разделы трех дисциплин, изучаемых в средней образовательной программе, а также дает возможность лучше подготовиться к единому государственному экзамену по предметам математика, информатика, физика. Авторы материалы постарались доступно разъяснить все ключевые моменты заявленных тем для уверенного и успешного выполнения теоретического этапа конкурса.